# 9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОБЩЕСТВЕННЫХ НАУКАХ

*Математика – это искусство давать различным вещам одинаковые названия.*

Анри ПУАНКАРЕ

В данной лекции рассматриваются некоторые динамические модели общественной жизни, по большей части характеризуемые описанными ранее уравнениями. В частности, исследуются процессы, относящиеся к политологии[[1]](#endnote-1), социологии[[2]](#endnote-2), психологии[[3]](#endnote-3).

Сначала рассматриваются достаточно простые математические модели политологии. Исследуемые системы можно интерпретировать как различные стадии перехода от тоталитаризма к демократии. На начальной стадии процесса предполагается, что после крушения тоталитарной системы при отсутствии демократических традиций в стране принимается конституция, допускающая многопартийность. В этих условиях образуются некоторые политические объединения, не имеющие четкой социально-политической платформы и группирующиеся, как правило, вокруг энергичных и честолюбивых лидеров, имеющих желание прийти к власти и удержать ее. Они конкурируют между собой за голоса избирателей, что соответствует модели политической конкуренции, описываемой хорошо известными уравнениями конкурентной борьбы. В этих условиях неизбежно побеждает сильнейший из конкурентов. Со временем в стране устанавливается полное господство одной партии.

Переход от формальной к реальной многопартийности возможен в том случае, когда какое-либо политическое объединение (естественно, не партия власти) начинает ориентироваться на конкретный социально-политический слой населения. При этом различные партии начинают выражать интересы не столько народа в целом, сколько отдельных социальных слоев. В результате мы приходим к модели политической ниши, описываемой рассмотренными соответствующими уравнениями.

На следующем этапе оппозиция может расширить свою политическую нишу и прийти к власти. После этого она не имеет возможности трансформироваться в новую партию власти и апеллировать ко всему народу сразу. Она связана определенными обязательствами перед теми социальными группами населения, которые привели ее к власти. В этих же условиях бывшая партия власти также уже не может оставаться партией всего народа. Ей невозможно добиться поддержки тех слоев населения, на которые опирается новая власть. Таким образом, мы получаем две партии с четко выраженными политическими платформами, которые способны сменять друг друга у власти. В результате получается третья модель политической борьбы.

Кроме того, в данной лекции рассматривается модель профсоюзной деятельности, описываемая уравнениями Вольтерра – Лотки, а также модель союзнических отношений, характеризуемая уравнениями симбиоза.

В Приложении описываются некоторые модели социальных процессов, являющиеся новыми интерпретациями моделей конкуренции, ниши и «хищник – жертва».

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Политическая конкуренция**

Предположим, что в некоторой стране впервые была принята демократическая конституция, допускающая многопартийность. В результате появляются политические группировки, претендующие на власть и конкурирующие между собой. В виду отсутствия в стране устоявшихся демократических традиций эти группировки еще не имеют более или менее четкой социально-политической программы. В отсутствии явной опоры в лице конкретных социальных слоев населения они стремятся заручиться поддержкой всего народа сразу и выходят на выборы под общенародными лозунгами.

Для простоты ограничимся рассмотрением политической борьбы двух партий за влияние среди избирателей. Состояние системы будем описывать функциями влияния *x*1 и *x*2, которые представляют собой число избирателей, предполагающих отдать свои голоса за данную партию. Каждая из партий ведет активную борьбу за расширение своего влияния и в отсутствии ограничений на число избирателей имела бы постоянный положительный прирост влияния. Однако в виду ограниченности числа потенциальных избирателей рост их влияния рано или поздно сокращается или даже становится отрицательным. Естественно, чем большее число избирателей уже сделало свой выбор на данный момент времени, тем меньше осталось потенциальных избирателей, которые еще могут отдать предпочтение какой-либо из партий. Таким образом, прирост влияния *i*-ой партии определяется по формуле

****

где *εi* – естественный прирост влияния партий, определяемый ее политической активностью, а *βi* – параметр процесса, характеризующий снижение прироста влияния партии за счет того, что в данный момент времени избиратели в количестве *x*1+*x*2 человек уже отдали свое предпочтение одной из партий. Коэффициент *βi* связан с политической программой партии (чем привлекательнее партия в глазах избирателя, тем в меньшей степени ей угрожает снижение влияния). В результате получаем уравнения

****  (9.1)

Эти соотношения определяют модель ***политической конкуренции***, которая фактически совпадает с рассмотренными в предшествующих лекциях моделями конкурентной борьбы.

Согласно проведенному ранее исследованию определяющую роль для поведения решения системы играет произведение *εiβi*, характеризующее силу партии. Та партия, которая обладает более сильной политической программой и активнее влияет на избирателей (т.е. имеет идеологическое, экономическое и психологическое преимущество в борьбе с политическими противниками), постепенно вытесняет своих конкурентов с политической сцены[[4]](#endnote-4). Таким образом, в том случае, когда партии выступают с общенародной программой, мы наблюдаем неизбежную монополизацию власти.

Полученные результаты говорят о том, что в стране устанавливается авторитарный режим. Его принципиальное отличие от предшествующего тоталитарного режима состоит в наличии сравнительно демократической конституции. Оппозиция имеет формальное юридическое право на существование, но не имеет реальной возможности воспользоваться этим правом и закрепиться в органах власти. Она непременно вытесняется со временем с политической арены. Оппозиционные партии существуют, но не оказывают никакого влияния на политическую жизнь страны. Их формальное существование крайне выгодно партии власти, которая имеет возможность заявлять о своей явной приверженности демократической форме правления, демонстрируя свою высокую цивилизованность перед мировым сообществом и получая за это определенные дивиденды.

***Соперничество партий, ориентированных на всех избирателей,   
описывается уравнениями конкуренции.***

***Согласно модели конкуренции итогом политической борьбы   
будет монополизация власти сильнейшей из партий.***

#### **2. Политическая ниша**

В рассмотренной выше модели политической конкуренции происходит постепенное вытеснение более слабой партии с политической арены. В этих условиях в государстве наблюдается тенденция к переходу на однопартийную систему, что фактически ведет к монополизации всей политической системы. Препятствием подобной монополизации может быть создание партий, изначально ориентированных не на абстрактного избирателя, а на конкретные слои населения с более или менее четкими групповыми интересами.

Мы рассмотрим политическую борьбу двух партий, имеющих достаточно широкую политическую платформу, но стремящихся выражать интересы некоторых определенных слоев населения. Динамика политической борьбы в этом случае описывается уравнениями

 (9.2)

где коэффициент *βij* характеризует эффективность политической программы *i*-ой партии в расчете на *j*-ую группу населения. Полученные соотношения фактически совпадают с рассмотренными ранее моделями типа "*экономическая ниша*". В предшествующей лекции было показано, что при выполнении неравенств ****т.е. в условиях, когда каждая партия более эффективно работает со своей группой избирателей, обе партии имеют шанс выжить и быть представленными в парламенте и местных органах власти. В принципе, выполнения указанных соотношений может добиться и одна партия, достаточно эффективно взаимодействующая с конкретным социальным слоем населения. Речь, понятно, идет не о могущественной партии власти, а о существенно более слабой оппозиции, которая может закрепиться на политической арене только при наличии у нее достаточно четкой политической ориентации.

Полученные результаты говорят о бесперспективности существования партий с размытой социальной программой. Среди подобных партий выживает только более сильная партия власти. Вспомним также, что в самом термине "партия" заключен смысл "части", а не "целого". Если в первой модели партия власти наверняка вытесняет с политической арены всех своих конкурентов, то в рассматриваемой модели ***политической ниши*** власть вынуждена терпеть оппозицию, которая приобретает некоторое число мест в парламенте и способна в определенной степени влиять политическую жизнь в стране. Однако парламентское большинство по-прежнему находится в руках у партии власти, которая сохраняет в своих руках реальные рычаги управления государством[[5]](#endnote-5).

**Задание 9.1. Политическая ниша. Качественный анализ**. Провести качественный анализ модели политической ниши и дать интерпретацию полученным результатам.

**Задание 9.1. Политическая ниша. Количественный анализ**. На основе численного решения уравнений (9.2) с соответствующими начальными условиями провести следующий анализ.

1. Найти все возможные положения равновесия системы (9.1). Дать их классификацию.

2. Провести расчеты при выполнении условия ****************. Убедиться в том, что побеждает вторая партия для любых начальных состояний системы.

3. Провести расчеты при выполнении условия ****************. Убедиться в том, что побеждает первая партия для любых начальных состояний системы.

4. Провести расчеты при выполнении условия **************** Меняя начальные состояния системы, обнаружить победу как первой, так и второй партии.

5. Провести расчеты при выполнении условия ****************. Убедиться в том, что обе партии сохраняют определенное влияние для любых начальных состояний системы.

***Конкуренция политических партий,   
выражающих интересы разных слоев населения описывается уравнениями ниши.***

***Согласно модели политической ниши, в условиях ориентации партий   
на разные слои населения возможно их длительное сосуществование.***

#### **3. Двухпартийная система**

Переход к третьему этапу политического процесса демократизации обусловлен постепенным расширением политической ниши у оппозиции. Дело в том, что оппозиция не несет никакой ответственности за социально-политическую и экономическую жизнь в стране, ограничиваясь острой критикой партии власти. Последняя же вынуждена действовать активно, а значит, неминуемо совершает время от времени всевозможные ошибки, задевает чьи-то интересы, вызывает определенное недовольство у сограждан. Со временем всё большее число обиженных избирателей отдает свои голоса оппозиции, которая не скупится на обещания. Рано или поздно политическая ниша оппозиции расширяется до размеров парламентского большинства, и в стране происходит смена власти.

Победившая оппозиция, будучи связанной данными ранее обещаниями и широко разрекламированной предвыборной программной, практически не имеет возможности выступать от имени всего народа. Она должна хоть к какой-то степени отстаивать прямые интересы тех слоев населения, которые привели ее к власти. С другой стороны, и проигравшая партия власти уже не в силах оставаться общенародной партией. За ней ни в коем случае не пойдут те слои населения, которые остро заинтересованы в проведении глубоких реформ нового правительства. С другой стороны, все недовольные этими реформами могут объединиться вокруг новой оппозиции при условии существенного изменения ею своей политической и экономической программы. В результате мы получим две партии с достаточно четкой социально-политической платформой, более или менее последовательно выражающие прямые интересы конкретных социальных слоев населения.

Отметим, что в большинстве стран с устоявшимися демократическими традициями политическая жизнь в значительной степени определяется деятельностью двух партий (или партийных блоков), одну из которых принято называть левой, а вторую – правой. Одна из них обычно придерживается социал-демократических традиций и отдает предпочтение принципу равенства, а другая – либерального толка и исповедует принцип свободы.

Целью левой партии является снижение социального неравенства между различными слоями населения. Она защищает, в первую очередь, интересы наиболее нуждающихся малоимущих граждан, справедливо полагая, что более состоятельные граждане сами способны за себя постоять. В этой связи левая партия борется за повышение пенсий и пособий, за снижение уровня безработицы, за увеличение льгот наименее защищенным в социальном плане гражданам.

Однако возникает вопрос, где же можно изыскать средства для претворения в жизнь столь благородной социальной программы левой партии? Желаемая цель может быть достигнута за счет проведения в жизнь достаточно жесткой налоговой политики и повышения влияния государства в управлении экономикой. Увеличивая налоги, левое правительство приобретает дополнительные средства у более состоятельных слоев населения и направляет вырученные деньги на социальные нужды, сглаживая тем самым противоречия между бедными и богатыми[[6]](#endnote-6). Проводя национализацию промышленности, левые создают новые рабочие места и оберегают малорентабельные предприятия от неминуемого финансового краха, грозящего потерей работы многим ни в чем не повинным трудящимся.

В свою очередь, правая партия выступает за свободу частного предпринимательства. Она убеждена, что повышение жизненного уровня населения является прямым следствием высокой эффективности производства. В этой связи правые считают необходимым защищать интересы сравнительно малочисленной, но существенно более активной группы граждан – тех, чья успешная профессиональная деятельность и определяет высокий уровень благосостояния страны. С этой целью правое правительство стремится увеличить приток капитала в страну, как отечественного, так и иностранного. Оно проводит либерализацию налоговой политики, закрывает убыточные государственные предприятия, сокращает различного рода государственные расходы. Правые стремятся снизить роль государства в управлении экономикой и проводят денационализацию предприятий, прекрасно понимая, что частное предпринимательство в условиях свободного рынка позволяет более эффективно управлять производством по сравнению с неповоротливым государственным регулированием.

Наша задача состоит в математическом моделировании процесса сосуществования двух партий со столь разными политическими платформами. В качестве функций состояния выбираем популярность левой и правой партий, которые будем обозначать через *х*1 и *х*2 соответственно. Популярность партии в тот или иной момент времени регистрируется с помощью опросов общественного мнения. Эти результаты закрепляются на парламентских, президентских, муниципальных выборах. Победившая партия получает возможность сформировать собственное правительство и попытаться претворить в жизнь свою политическую и экономическую программу. Если партия оправдывает доверие своих избирателей, то она сможет продержаться до следующих выборов и остаться у власти на новый срок. При неудачной политике правительства к власти приходит оппозиция, возможно, даже на досрочных выборах.

Вся деятельность левого правительства направлена на улучшения уровня жизни населения, повышения доходов широких народных масс. Правая партия стремится повысить эффективность производства, добиться оздоровления экономики страны. В этой связи в число функций состояния мы включаем также средние доходы населения *у*1 и эффективность производства *у*2. Таким образом, нам необходимо установить, каким образом будут меняться со временем популярность левой и правой, а также доходы населения и эффективность производства.

Скорость изменения влияния любой из партий по-прежнему будем считать пропорциональной значению этого влияния. При этом рост влияния левой партии возможен при сравнительно низком уровне жизни населения, когда всё большее число граждан будет нуждаться в социальной защите. В то же время этот рост произойдет лишь при достаточно высокой эффективности производства, а иначе значительное количество избирателей отдадут предпочтение правой партии. При тех же самых условиях происходит снижение влияния консерваторов. В результате получаются уравнения

 (9.3)

где *α*1, *α*2 – параметры процесса.

С усилением влияния левой партии и падением влияния правых наблюдается рост доходов широких слоев населения, поскольку с приходом к власти левые начинают бороться с безработицей, повышать пенсии, социальные льготы мало имущим и т.д. В то же самое время, как это не печально, происходит падение эффективности производства. Дело в том, что по мере создания новых рабочих мест, повышения отчислений на социальные нужды и прочих благородных деяний неизбежно снижаются доходы на предприятиях, а увеличение налогов неминуемо приводит к неуклонно возрастающему желанию у несознательных предпринимателей уклониться от их уплаты и к оттоку капитала за границу. Напротив, с приходом к власти правой партии (т.е. в условиях роста их влияния и снижения популярности левых) начинается отчаянная борьба за оздоровление экономики страны, но при неизбежном сокращении ассигнований на социальные нужды и росте безработицы. В результате получаем уравнения

 (9.4)

где *β*1, *β*2 – параметры процесса.

Соотношения (9.3, (9.4) с соответствующими граничными условиями составляют математическую модель ***двухпартийной системы***. Проведем математический анализ полученной задачи. Из уравнений (9.3), (9.4) следуют соотношения



Таким образом, справедливы равенства

*х*1(*t*)*х*2(*t*) = *c*1, *y*1(*t*)*y*2(*t*) = *c*2, (9.5)

где *c*1, *c*2 – константы, определяемые начальными состояниями системы.

Выражая из условий (9.5) функции *х*2 и *у*2, приводим систему (9.3), (9.4) к следующему виду

 (9.6)

Проведем замену переменных

*τ* = *at*, *u*(*τ*) = *bx*1(*t*), *v*(*τ*) = *cу*1(*t*),

где параметры *a*, *b*, *c* выбираются так, чтобы предшествующие уравнения оказались как можно проще. В результате получаем следующие уравнения



Определим значения



В результате получаем уравнения

 (9.7)

Установим поведение решение полученной системы. Пусть, к примеру, в начальный момент времени справедливы неравенства

0 < *u*(*t*) < 1, 0 < *v*(*t*) < 1. (9.8)

Тогда согласно соотношениям (9.7) функция *u* возрастает, а *v* – убывает. По мере приближения функции *v* к нулю из первого уравнения следует, что производная *u*' стремится к бесконечности. Таким образом, в некоторый момент времени, функция *u* превзойдет значение единицы, и будут выполнены соотношения

*u*(*t*) > 1, 0 < *v*(*t*) < 1.

В результате наступает возрастание обоих функций, которое продолжается до тех пор, пока вторая из них не станет больше единицы. При выполнении неравенств

*u*(*t*) > 1, *v*(*t*) > 1

наблюдается убывание функции *u* и возрастание *v* вплоть до момента времени, когда будет выполнено равенство *u* = 1. При

0 < *u*(*t*) < 1, *v*(*t*) > 1

обе функции убывают. Если функция *u* приближается к нулю, то согласно второму уравнению (9.7) производная *v*' монотонно убывает, а значит, со временем функция *v* достигнет значения единицы. В результате будут выполнены неравенства (9.8), и далее процесс возобновляется. Можно убедиться, что решения системы оказываются периодическими функциями.

Проанализируем полученные результаты с точки зрения политологии. Предположим, что в начальный момент времени преобладает влияние правой партии, доходы населения сравнительно низкие, а эффективность производства достаточно высока, что соответствует справедливости соотношений (9.8). В этих условиях происходит серьезный рост популярности левых (их потенциальные избиратели достаточно активны в виду низких доходов широких народных масс) и падение влияния правых (более зажиточные слои населения, ориентирующиеся традиционно на них, при высокой эффективности производства остаются сравнительно пассивными). Если в это время происходят парламентские выборы, то на смену окончательно дискредитировавшего себя правительства правых к власти придут добрые левые к великой радости широких народных масс.

С целью повышения доходов населения, честно реализуя свою предвыборную программу, бравые левые увеличивают размеры пенсий, пособий, социальные льготы малоимущим. Это достигается за счет увеличения налогов (а откуда еще?), которые платят главным образом более состоятельные слои населения. Левое правительство создает новые рабочие места, успешно проводя борьбу с безработицей. Для этого они осуществляют национализацию предприятий, поскольку именно в государственных учреждениях в условиях правления левых можно добиться сравнительно высокого уровня занятости и относительно высоких окладов для многочисленных мало квалифицированных работников. Следствием проводимой политики правительства являются постепенное возрастание доходов широких народных масс и явное снижение социальной напряженности.

Однако славный политический курс сердобольных левых имеет, к сожалению, и отрицательные последствия. Жесткая налоговая политика правительства приводит к тому, что значительная масса предпринимателей становится не заинтересованной в развитии отечественной промышленности и предпочитают вывозить свой капитал за границу, где налоговое бремя не столь уж сурово. Государственные предприятия, на которых трудятся слишком большое количество не очень квалифицированных и сравнительно неплохо оплачиваемых рабочих и служащих, становятся убыточными и функционируют главным образом за счет дотаций государства. Средства на подобные дотации и на реализацию широкой социальной программы поступают в государственную казну за счет все возрастающих налогов. Однако в условиях вывоза значительной части капитала за границу и массового уклонения от уплаты налогов государство получает всё меньше денежных средств от своих несознательных сограждан. При увеличении расходов и снижении доходов государства правительство вынуждено идти на повышение уровня инфляции, что ведет к дестабилизации производства и снижению его эффективности, а также к неминуемому росту цен[[7]](#endnote-7).

Наступивший экономический кризис, характеризуемый низкой эффективностью производства, ведет к неминуемому падению популярности левого правительства и существенному росту влияния правой партии. Малоимущие слои населения, добившиеся определенного повышения своего благосостояния, уже не отличаются высокой политической активностью и даже смеют выражать явное недовольство своими благодетелями в связи с неуклонным ростом цен. С другой стороны, возрастает политическая активность более состоятельных граждан, кровно заинтересованных в стабилизации экономики и повышении эффективности производства. В этих условиях на очередных или даже досрочных парламентских выборах к всеобщему удовлетворению неблагодарных сограждан побеждает правая оппозиция.

Новое правительство начинает активно бороться за оздоровление экономики. Оно решительно сокращает статьи государственных расходов, существенно снижает налоги, проводит денационализацию производства. Вследствие снижения налогов в отечественные предприятия направляется значительный капитал, в том числе, иностранный. Убыточные предприятия благополучно разоряются из-за серьезного сокращения государственных дотаций. В целях повышения эффективности производства нерентабельные предприятия передаются в частные руки, а корыстолюбивый хозяин, стремясь добиться максимальной прибыли, увольняет лишних служащих, разучившихся как следует работать за время бесславного правления легкомысленных левых. Наступает долгожданная финансовая стабилизация и заметное повышение эффективности производства.

К сожалению, проводимый консерваторами курс на либерализацию экономики неминуемо приводит и к ряду весьма нежелательных последствий. Снижение статей расходов государства ведет к уменьшению размеров пенсий, пособий, стипендий. Вследствие перехода государственных организаций в частные руки и разорения убыточных предприятий стремительно растет безработица. Стабилизация экономики достигается в значительной степени за счет наименее защищенных слоев населения. В результате происходящих событий в стране углубляется социальная напряженность. Наступивший социально-политический кризис сопровождается резко возросшей политической активностью широких народных масс. В то же время активность более обеспеченных слоев населения, получающих сравнительно большие доходы, заметно снижается. Вследствие этого растет популярность левой оппозиции, героически отстаивающих интересы трудящихся, и снижается влияние правых. В итоге на ближайших парламентских выборах к власти приходят левые. Наступает новый цикл рассматриваемого процесса[[8]](#endnote-8).

На практике мы действительно наблюдаем попеременный приход к власти партий с различными политическими платформами[[9]](#endnote-9).

**Задание 9.2. Двухпартийная система**. На основе численного решения уравнений (9.3), (9.4) с соответствующими начальными условиями провести следующий анализ.

1. Задавая произвольным образом параметры системы, убедиться в том, что все функции состояния системы со временем меняются периодически.

2. Меняя коэффициенты уравнений при фиксированных начальных состояниях системы, обнаружить ее положение равновесия.

3. Меняя начальные состояния при неизменных коэффициентах уравнений, обнаружить положение равновесия системы.

4. Установить зависимость периода колебания от параметра *β*1.

5. Установить зависимость амплитуды колебания функции *у*2 от параметра *α*1.

***Математической моделью двухпартийной системы   
является система четырех нелинейных дифференциальных уравнений*.**

***Согласно модели двухпартийной системы   
партии поочередно сменяют друга у власти.***

#### **4. Профсоюзная деятельность**

Рассмотрим достаточно простую динамическую модель профсоюзной деятельности на производстве. Функциями состояния здесь будут степень влияние профсоюза *х*1 и социальные условия *х*2 на рассматриваемом предприятии. Предполагается, что при существенном ухудшении социальных условий влияние профсоюза растет с некоторой скоростью *ε*1, а при полном отсутствии влияния профсоюза социальные условия ухудшаются с постоянной скоростью *ε*2. Рост влияния профсоюза сопровождается улучшением социальных условий, что, в свою очередь, приводит к падению влияния профсоюза. Таким образом, математическая модель рассматриваемого процесса принимает вид



где константы *γ*1 и *γ*2 являются параметрами задачи.

Приведенные уравнения уже встречались ранее при описании химических, биологических и экономических процессов. Мы вновь имеем дело с уравнениями Вольтерра – Лотки, т.е. с моделью типа хищник – жертва. Как известно, они имеют периодическое решение (см. Рис. 9.1). Дадим интерпретацию этих результатов

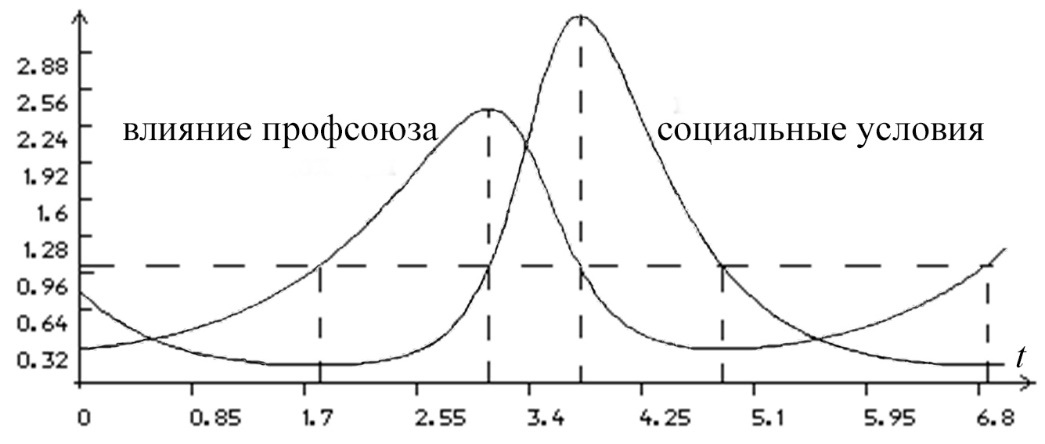


Рис. 9.1. Колебание влияния профсоюза и социальных условий на производстве.

Если в начальный момент времени влияние профсоюза достаточно слабое, а социальные условия – низкие, то выражение в правой части первого уравнения положительно, а для второго уравнения – отрицательна. Таким образом, на первой стадии процесса наблюдается рост влияния профсоюза (все больше трудящихся при плохих социальных условиях на производстве обращается за помощью к профсоюзу) и дальнейшее ухудшение социальных условий (при слабом влиянии профсоюза жадный предприниматель стремится извлечь максимальную прибыль за счет жестокой эксплуатации бесправных трудящихся). С ростом влияния профсоюза непременно наступает момент перехода ко второму этапу, когда предприниматель уже вынужден считаться с профсоюзом и под угрозой забастовки идет на определенное удовлетворение справедливых требований своих сотрудников. Происходит улучшение социальных условий при непрекращающемся росте влияния профсоюза, пользующегося все возрастающей поддержкой рабочих и служащих. Однако по мере подъема жизненного уровня у неблагодарных людей постепенно отпадает необходимость оказывать поддержку профсоюзу. На третьем этапе влияние профсоюза начинает падать, в то время как социальные условия на производстве пока еще растут, поскольку профсоюз остается еще достаточно сильным, а потому предприниматель не рискует проводить какие-либо нехорошие мероприятия. Однако с падением влияния профсоюза корыстолюбивый собственник начинает бороться за повышение своих доходов, естественно, за счет ни в чем не повинных трудящихся. На четвертом этапе наблюдается дальнейшее снижение влияния профсоюза (социальные условия еще сравнительно высоки, и профсоюз не успел набрать силу) и ухудшение жизненных условий. По мере ухудшения уровня жизни трудящихся со временем профсоюз вновь восстанавливает свое влияние и процесс повторяется.

Новые варианты интерпретации модели «хищник – жертва» приводятся в Приложении.

***Изменение влияния профсоюза и социальных условий на производстве описывается уравнениями Вольтерра – Лотки.***

***Согласно данной модели характеристики системы являются периодическими функциями.***

#### **5. Союзнические отношения**

Рассмотрим две страны, сражающиеся с общим противником. Предполагается, что противник значительно сильнее и способен победить каждого из союзников в отдельности. Однако при их активном взаимодействии противник может оказаться побежденным. Чем сильнее один союзник, тем проще вести боевые действия другому союзнику. В результате приходим к уравнениям



где *хi* – сила *i*-ого союзника, *εi*– скорость его поражения в отсутствии другой союзника, а *γi* – показатель влияния *j*-ого союзника на *i*-ого.

Полученные соотношения точностью до обозначений совпадают с биологической моделью симбиоза и моделью экономического сотрудничества. Зная свойства последних, приходим к следующим результатам. Если оба союзника сравнительно слабы, то полную победу одерживает противник. В противном случае силы союзников неограниченно возрастают. В случае, когда один из союзников достаточно слаб, а другой – силен, исход боевых действий определяется соотношением между всеми параметрами системы. Здесь возможны как победа, так и поражение союзников.

**Задание 9.3. Союзнические отношения**. На основе численного решения системы и условиями провести следующий анализ.

1. Найти положения равновесия системы и проанализировать поведение системы в их окрестностях.

2. Убедиться в том, что при сравнительно малых значениях начальных состояний системы союзники терпят поражение.

3. Убедиться в том, что при сравнительно больших значениях начальных состояний системы союзники побеждают.

4. Для случая, когда один из союзников достаточно силен, а другой – сравнительно слаб, установить как победу, так и поражение союзников. Дать интерпретацию происходящим событиям.

***Союзнические отношения описываются моделью типа «симбиоз»***

***Согласно дели модели возможна как победа, так и поражение союзников в зависимости от начальных состояний системы.***

**Направление дальнейшей работы**. Ознакомившись с простейшими моделями, характеризуемыми системами с сосредоточенными параметрами, мы переходим к системам с распределенными параметрами. Соответствующие функции состояния зависят от нескольких переменных. Нам предстоит работать с уравнениями в частных производных.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

Ниже приводятся новые интерпретации хорошо знакомых нам моделей типа конкуренции (борьба за лидерство в группе и племен за территорию), ниши (раскол группы, размежевание племен) и "хищник – жертва" (эффективность государственного аппарата, взаимоотношения между метрополией и колонией и семейных отношений).

#### **1. Модели типа конкуренции**

Рассмотрим новые варианты моделей конкуренции. Первый из них связан с ***борьбой за лидерство*** в группе. Имеется некоторая изолированная группа людей, оказавшихся в силу тех или иных причин достаточно тесно связанными между собой. Это может быть вновь образующийся профессиональный коллектив, группа случайных попутчиков, неожиданно оказавшаяся в длительной изоляции от внешнего мира, группа туристов, шайка бандитов и т.д. В подобном сообществе обычно бывает изначально признанный всеми официальный лидер. Однако возможна ситуация, когда либо такового лидера не было изначально, либо он выбыл из коллектива по каким-либо причинам, либо полностью дискредитировал себя. В таких условиях, как правило, кто-нибудь из группы пытается взять всю инициативу на себя. При этом зачастую на лидерство претендует сразу несколько человек. Мы рассмотрим ситуацию, когда в группе имеется два потенциальных лидера, между которыми происходит борьба за влияние в коллективе.

В качестве состояния системы выбираются функции *x*1 и *x*2, характеризующие степень влияния каждого из лидеров. Предполагается, что каждый из лидеров проявляет определенную активность, подтверждающую его право на лидерство. Таким образом, влияние *i*-ого лидера росло бы с некоторой скоростью ε*i* в случае неограниченности группы. Однако в действительности рост популярности лидеров снижается тем сильнее, чем больше членов группы уже отдали на данный момент предпочтение кому-либо из лидеров. В результате приходим к уравнениям

**** (9.10)

где коэффициенты *βi*являются параметрами задачи и характеризуют степень привлекательности планов, предлагаемых соответствующим лидером.

Мы в очередной раз сталкиваемся с моделью конкуренции, см., в частности, уравнения (9.1). Как известно, здесь побеждает тот лидер, у которого выше активность и привлекательнее планы, а точнее, тот, у которого произведение *εiβi* принимает наибольшее значение. Таким образом, со временем вся группа признает одного лидера, оказавшегося наиболее авторитетным.

Еще один вариант модели типа конкуренции связано с описанием борьбы племен за территорию. Предполагается, что племена имеют один и тот же образ жизни и ориентируются на одинаковую среду обитания. В случае малочисленности племен и неограниченности свободной территории племена постоянно осваивают новые земли. Однако в условиях ограниченности незаселенной территории они вступают в конкуренцию между собой. Необходимо установить изменение со временем территории, контролируемой каждым из племен, при условии, что начальные значения этих величин известны. Рассматриваемый процесс описывается той же следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений (9.10), где *xi* – размер территории *i*-ого племени в момент времени *t*, *εi*– активность племени,*βi*– эффективность освоения территории. Мы получаем еще один вариант модели конкурентной борьбы. Ее исход предопределен – более сильное племя постепенно захватит всю территорию, поглотив либо уничтожив всех своих конкурентов.

Таблица 9.1. Характеристика моделей конкуренции и ниши.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **наука** | **Модель** | **функции состояния** | **предмет**  **конкуренции** |
| физика | двухмодовый лазер | число различных типов фотонов | возбужденные атомы |
| химия | конкуренция  реагирующих веществ | концентрация "конкурирующих" веществ | реагирующее вещество |
| биология | биологическая конкуренция видов | численность видов | пища |
| экономика | экономическая  конкуренция фирм | капиталы фирм | потребители товаров |
| политология | конкуренция партий | влияние партий | голоса избирателей |
| социология | борьба племен | контролируемая территория | свободная территория |
| психология | борьба за лидерство в группе | влияние лидеров | признание в группе |
| психология | семейные отношения | авторитет свекрови и невестки | влияние на сына или мужа |

Сравнительный анализ моделей конкуренции в различных интерпретациях приводится в Таблице 9.1.

#### **2. Модели типа ниши**

Вернемся к рассмотрению задачи о конкуренции лидеров в группе. Если каждый из потенциальных лидеров стремится заручиться поддержкой не всего коллектива, а ориентируется главным образом на какую-то объединенную общими интересами группировку, то мы снова приходим к модели "*ниши*". При некотором сочетании параметров (см. выше) вытеснение одного лидера другим не происходит, а оба они сохраняют определенное влияние. Каждый из них со временем оказывается во главе части коллектива. Тем самым наблюдается раскол группы на две более или менее изолированные и существенно более устойчивые (по сравнению с исходным коллективом) группировки со своими признанными авторитетами[[10]](#endnote-10). Этот процесс описывается уравнениями (9.2)

 (9.11)

Обратимся теперь к задаче о борьбе племен за территорию. Предположим, что каждое из племен отдает предпочтение особой среде обитания (например, одним больше по душе степи или долины рек, а другие чувствуют себя уютнее в горах или в лесах), то события могут развиваться по иному сценарию. В этом случае процесс описывается уравнениями (9.12), где *xi* – территория, контролируемая параметры *i*-ым племенем, *εi*– активность племени,а *βij*характеризуют эффективность освоения *i*-ым племенем *j*-ой территории. При определенном сочетании параметров (см. предшествующие лекции) здесь возможно размежевание племен – каждое из них постепенно захватывает ту территорию, которой оно отдает большее предпочтение. Примерно такие явления наблюдались в процессе образования государств. Не случайно границы государств чаще всего имеют естественный характер, соответствующий линии размежевания населяющих их народов.

Рассмотрим еще один пример модели ниши, теперь уже из психологии. Имеется семья, состоящая из мужа, жены и его матери. Предполагается, что свекровь и невестка находятся в теплых семейных отношениях, изо всех сил стараясь утвердить свое влияние на единственного мужчину в семье. А тот, бедняга, разрывается между горячей любовью к матери и жене. Функциями состояния здесь будут степени влияния *x*1 и *x*2 соответственно, свекрови и невестки на любимого сына и мужа.

Предполагается, что скорость изменения влияния каждой из женщин пропорциональна значению этой величины. Как свекровь, так и невестка имеют отличные отношения с "главой семьи", так что прирост их влияния непременно включает в себя некоторую положительную величину ε*i*, определяемую достоинствами данной женщины в глазах мужчины. Если бы прирост влияния ограничивался лишь этим фактором, то мы наблюдали бы неограниченный рост влияния каждой из женщин. На практике рост влияния естественно сдерживается. В частности, имеется также и падение влияния, характеризуемое выражением –*αiixi*, где параметр *αii* характеризует снижение влияния *i*-ой женщины, определяемый ее личными недостатками в глазах мужчины. Наконец, свекровь и невестка стремятся снизить влияние соперницы на мужчину, вследствие чего прирост влияния *i*-ой женщины включает в себя также отрицательное выражение –*αijxj*, где константа *αij* характеризует степень антипатии к данной женщине ее соперницы.

На основе сделанных предположений заключаем, что исследуемый процесс описывается следующей системой уравнений



эквивалентной (9.11). В зависимости от сочетания параметров события могут развиваться по различным сценариям.

При выполнении неравенств

ε1/α11 > ε2/α21, ε1/α12 > ε2/α22

невестка по всем статья проигрывает свекрови. Вследствие этого ее влияние на супруга постепенно сходит на нет, что неминуемо влечет за собой развод или безоговорочное подчинение невестки решительной и властной свекрови. Противоположные соотношения напротив означают полное поражение свекрови. Она либо покоряется более энергичной невестке, либо поселяется отдельно от неблагодарных супругов. Условия

ε1/α11 = ε2/α21, ε1/α12 = ε2/α22

свидетельствуют о равенстве сил противоборствующих сторон. Милые особы продолжают вести активные боевые действия с переменным успехом, причем ни одна из них не в состоянии окончательно одержать верх. Неравенства

ε1/α11 > ε2/α21, ε1/α12 < ε2/α22

соответствуют случаю, когда определяющую роль играют не личные качества женщин (отношения достоинств к недостаткам), а степень их взаимной антипатии. Исход здесь также оставляет желать лучшего – в зависимости от начального состояния системы (отношениям враждующих сторон с мужчиной к началу их совместного проживания) полную победу одерживает либо невестка, либо свекровь. Наконец, остается еще вариант, характеризуемый условиями

ε1/α11 < ε2/α21, ε1/α12 > ε2/α22,

при которых личные качества женщин берут верх над их взаимной антипатией. Каждая из них находит свою нишу, а в семье со временем воцаряется мир и покой[[11]](#endnote-11).

Различные интерпретации моделей типа ниши приводятся в Таблице 9.1.

#### **3. Модели типа «хищник – жертва»**

Рассмотрим функционирование государственного аппарата во время проведения широкомасштабных экономических и политических реформ. Нас будет интересовать, прежде всего, эффективность проведения реформ, которую можно условно охарактеризовать меняющейся со временем функцией *x*1. Для реализации реформ необходим соответствующий государственный аппарат, численность которого *x*2 выбирается в качестве второй функцией состояния. Будем полагать, что в естественных условиях при отсутствии противодействия экономическим преобразованием со стороны государственного аппарата реформы развиваются с некоторой скоростью *ε*1. Однако по мере роста численности государственных чиновников происходит пропорциональное падение темпов реформ. В свою очередь, в случае полного провала экономических реформ производится сокращение государственного аппарата с заданной скоростью *ε*2. При углублении же реформ требуется привлечение все большего количества государственных чиновников для реализации правительственной программы. В результате приходим к уравнениям



где константы *γ*1 и *γ*2 являются параметрами задачи. Полученная система аналогична модели "*хищник - жертва*" и имеет периодические решения.

С возрастанием темпов реформ возникает необходимость в увеличении численности участвующих в управлении государства служащих, которые призваны непосредственно воплощать в жизнь решения правительства. Однако разросшийся государственный аппарат постепенно становится тормозом реформ, а темпы их проведения неуклонно падают. Замедление темпов реформ свидетельствует о низкой эффективности работы государственного аппарата. Для преодоления возникших трудностей проводится реорганизация аппарата с неизменным сокращением штатов государственных чиновников. Государственный аппарат становится более мобильным, а темпы проведения реформ ускоряются. Однако для их поддержания имеющейся численности государственных служащих почему-то оказывается недостаточно. Аппарат постепенно разбухает, а ход реформ, напротив, замедляется. Мы приходим к новому этапу рассматриваемого процесса. Полученные результаты проливают определенный свет на неистребимую способность чиновничества к выживанию при любых государственных потрясениях.

Рассматривается теперь взаимоотношения между колонией и метрополией. Предполагается, что в отсутствии метрополии колония богатеет, а в отсутствии колонии метрополия беднеет. Чем богаче колония, тем больше получает от нее метрополия. Чем сильнее метрополия, тем больше она эксплуатирует колонию. В результате приходим к еще одному варианту модели "*хищник - жертва*". Исход событий нам известен. Метрополия стремится как можно сильнее обогатиться за счет колонии. Однако по мере постепенного ослабления колонии, метрополия вынуждена снижать объем взимаемой дани. В результате со временем колония восстанавливает свое богатство, после чего метрополия на некоторое время получает возможность более интенсивно эксплуатировать колонию. После этого беднее колония, а вслед за ней – и метрополия, и события начинают повторяться.

Таблица 9.2. Характеристика моделей типа "*хищник-жертва*"[[12]](#endnote-12).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***наука*** | **модель** | **«жертва»** | **«хищник»** |
| *химия* | реакция Лотки | концентрация  первого продукта | концентрация второго продукта |
| *биология* | хищник – жертва | численность жертв | численность хищников |
| *сельское*  *хозяйство* | плодородие – урожайность | урожайность  культуры | плодородие  почвы |
| *экономика* | свободный рынок | доходы населения | уровень цен |
| *экономика* | монополизированный рынок | доходы населения | объем производства |
| *экономика* | предприниматель – рэкетир | доход предпринимателя | доход рэкетира |
| *социология* | профсоюз | влияние профсоюза | социальные условия |
| *социология* | государственный аппарат | эффективность реформ | численность аппарата |
| *социология* | метрополия – колония | доходы колонии | доходы метрополии |

Характеристика моделей основные классов взаимоотношения двух субъектов приводится в Таблице 9.3[[13]](#endnote-13).

**Задание 9.4. Модели взаимоотношения двух субъектов**.

1. Придумать новую интерпретацию модели типа конкуренции.

2. Придумать новую интерпретацию модели типа ниши.

3. Придумать новую интерпретацию модели типа «симбиоз».

4. Придумать новую интерпретацию модели типа «хищник–жертва».

Таблица 9.3. Характеристика рассмотренных моделей.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **наука** | **хищник – жертва** | **конкуренция** | **ниша** | **симбиоз** |
| физика |  | двухмодовый лазер |  |  |
| химия | система реакций Лотки | химическая конкуренция | химическая ниша |  |
| биология | хищник - жертва | биологическая конкуренция | экологическая ниша | симбиоз |
| сельское  хозяйство | плодородие - урожайность |  |  |  |
| экономика | свободный рынок  монополизированный рынок  рэкетир - предприниматель | экономическая конкуренция | экономическая ниша | сотрудничество фирм |
| социология | профсоюз  государственный аппарат  метрополия - колония | борьба племен | размежевание племен | союзники |
| политология |  | политическая конкуренция | политическая ниша |  |
| психология |  | борьба за лидерство | раскол в группе  семейные отношения |  |

## КОММЕНТАРИИ

1. Математические модели политологии рассматриваются, например, в Alker, Johnson, Marchenko, Polak. [↑](#endnote-ref-1)
2. Математические модели социологии рассматриваются в Bonacich, Buchler, Burghes, Marchi, Hanneman, Hayes, Huckfeldt, Huseynova, Kemeny, Lave, Lopez, Strawinska, Ustinov. Помимо дифференциальных уравнений для описания явлений социологии применяется аппарат теории вероятностей и математической статистики, см. Kemeny, Marchi и теории игр, см. Buchler, Marchi. Стохастическим моделям посвящена лекция № 17, а использованию теории игр – лекция № 16. [↑](#endnote-ref-2)
3. Математические модели психологии рассматриваются, например, в Alker, Johnson, Marchenko, Polak. [↑](#endnote-ref-3)
4. Как мы уже знаем, наличие трех и более конкурирующих сторон приводит к аналогичным результатам, см., в частности, лекцию № 7. [↑](#endnote-ref-4)
5. Естественно здесь предполагается, что партия власти соблюдает правила игры, позволяя оппозиции открыто отстаивать свою политическую платформу. [↑](#endnote-ref-5)
6. Перераспределение чего-либо из области, где его много, в область, где его мало характерно для процессов переноса (теплопроводности, диффузии и др.), см. Лекции № 10 и Лекции № 11. [↑](#endnote-ref-6)
7. См. модель инфляции в предыдущей лекции. [↑](#endnote-ref-7)
8. Мы уже рассмотрели некоторое количество систем, допускающих периодическое решение. Они описывались качественно разными уравнениями. В частности, уравнение колебания маятника линейно, в модели «хищник – жертва» мы имели систему двух нелинейных уравнений, а в данном случае процесс описывается четырьмя нелинейными уравнениями. Однако во всех этих случаях мы наблюдаем баланс между объектами – кинетической и потенциальной энергиями, хищниками и жертвами, левой и правой партиями. Всюду наличие этого баланса делает систему относительно стабильной. Во всех случаях соответствующее положение равновесия является центром. [↑](#endnote-ref-8)
9. Характерно, что чем выше экономический уровень в стране, чем больше период колебания. Отметим также, что в данном случае (как и во всех прочих) мы описывали не реальную ситуацию, а результат моделирования исследуемого процесса. Современные левые и правые партии в демократических странах давно уже научились проводить более гибкую политику и не столь уж различаются своими социально-экономическими программами. Политическая жизнь общества намного сложнее и лишь в незначительной степени поддается четкому математическому моделированию. Однако то же самое следовало бы сказать о физических, химических и других процессах. Едва ли имеет смысл резко противопоставлять естественные и гуманитарные науки. [↑](#endnote-ref-9)
10. Подобным результатам можно придать и несколько иную интерпретацию. Возможно, лидеры будут искать свою "нишу" не в завоевании популярности у части членов группы, а в закреплении за собой некоторой сферы деятельности, в которой каждый их них признается безоговорочным авторитетом. Так, при формировании нового творческого коллектива один из лидеров может взять на себя решение профессиональных вопросов, а другой – организационных дел. В туристской группе лидеры могут поделить между собой хозяйственные и тактические функции. В подобной ситуации раскол коллектива носит функциональный характер, а группа продолжает существовать как единое целое при непременном условии, что каждый из лидеров признает за другим главенство в его сфере деятельности. [↑](#endnote-ref-10)
11. Описанная модель никак не учитывает реакцию на происходящие события самого виновника и предмета раздоров. Однако так ли уж нужно спрашивать мнение авторитетного главы семьи, когда серьезный спор идет между любящими представительницами слабого пола? Впрочем, отношения между тещей и зятем характеризуются не менее захватывающими событиями. [↑](#endnote-ref-11)
12. Таблица 9.3 является расширением Таблицы 8.7. [↑](#endnote-ref-12)
13. Не следует воспринимать слишком серьезно некоторые из приведенных здесь моделей. В некотором смысле, это просто игра. Однако игра небесполезная. [↑](#endnote-ref-13)